Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
Муниципальный тур 2012 года

7 класс

1. На столе стоят кофейник с кофе и молочник с молоком. Вся семья выпила по полной чашке кофе с молоком (чашки одинаковые), после чего кофейник и молочник остались пустыми. При этом Катя выпила $1/4$ всего молока и $1/6$ всего кофе. Сколько человек в семье?

2. Если 777 умножить на 429, то получится 333333. На что нужно умножить 777, чтобы получить шестизначное число, записанное одними четверками?

3. Можно ли увезти 50 камней, массы которых 370 кг, 372 кг, 374 кг, 376 кг, $\ldots$, 468 кг, на семи трехтонных грузовиках?

4. Представьте число 11112222 в виде произведения двух четырехзначных чисел.

5. Нарисуйте какую-нибудь фигуру, которой нельзя покрыть полукруг радиуса 1, но двумя экземплярами которой можно покрыть круг радиуса 1.

Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
Муниципальный тур 2012 года

8 класс

1. Натуральное число увеличили в два раза. Может ли его сумма цифр уменьшиться в два раза? Если да, то приведите пример.

2. В треугольнике $\triangle ABC$ угол C прямой. Из центра C радиусом AC описана дуга окружности, пересекающая гипотенузу в точке D, а катет CB в точке E. Найдите углы $\angle ACD$ и $\angle DCE$, если $\angle B = 40^\circ$.

3. На разделочной доске лежат один круглый и один квадратный блин. Всегда ли (независимо от их взаимного расположения) можно провести один прямолинейный разрез, рассекающий каждый из них на две равные части?

4. После окончания учебного года Миша решил вырвать из своего учебника математики все листы, на каждом из которых сумма номеров страниц (на обеих сторонах листа) является квадратом целого числа. Сколько листов он вырвал, если в учебнике 240 листов?

5. Найдите два таких трехзначных числа x и y, что сумма всех остальных трехзначных чисел равна $600x$.

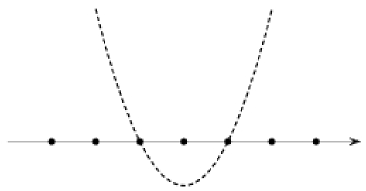
Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
Муниципальный тур 2012 года

9 класс

1. На доске записаны числа 1, 2, 4, 8, 16, 32. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность — неотрицательное число. Может ли на доске в результате нескольких таких операций остаться только число 13?

2. Найдите наименьшее натуральное число n, при котором число $n(n+1)(n+2)$ делится на 2012.

3. На рисунке изображен график квадратного трехчлена x^2+px+q (ось ординат стерлась, расстояние между отмеченными точками оси абсцисс равно 1). Найти дискриминант этого трехчлена.



4. Один из углов равнобедренного треугольника равен 120°. Из середины основания опущен перпендикуляр на боковую сторону. В каком отношении основание перпендикуляра делит боковую сторону?

5. От двух кусков сплава серебра с золотом (с различным содержанием золота) массой в 6 и 12 кг отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание золота в обоих сплавах стало одинаковым. Каковы массы каждого из отрезанных кусков?

Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
Муниципальный тур 2012 года

10 класс

1. Существуют ли целые числа x, y и z такие, что $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3 = 2012$?

2. Первая и вторая цифры двухначного числа N являются первым и вторым членом некоторой геометрической прогрессии, а само число N втрое больше третьего члена той же прогрессии. Найдите все такие числа N.

3. Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в двух точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$.

4. На плоскости проведена окружность с центром O радиуса 1. Две соседние вершины квадрата лежат на этой окружности. На каком наибольшем расстоянии от точки O могут лежать две другие его вершины?

5. Какое наибольшее количество белых и черных ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы любая белая ладья не била никакую ладью по горизонтали, а любая черная ладья не била никакую ладью по вертикали?

Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
Муниципальный тур 2012 года

11 класс

1. Найдите все целые решения неравенства $x^2 < 3 - 2\sin 5x$.

2. Натуральное число увеличили в три раза. Может ли сумма его цифр при этом уменьшиться более чем в три раза? Если да, то приведите пример.

3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K, для которой $CK = BC$. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в её середине. Найдите углы треугольника ABC.

4. На гранях 8 одинаковых кубиков имеются кляксы: по одной кляксе на двух противоположных гранях, по две на других двух противоположных гранях, и по три кляксы на оставшихся двух гранях каждого кубика. Из этих 8 кубиков сложили куб $2\times2\times2$. Может ли оказаться, что числа клякс на гранях этого куба образуют шестерку последовательных натуральных чисел?

5. Найдите пятую цифру после запятой в десятичной записи следующей суммы

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{9}{10!}.$$

Здесь $n!$ есть произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно, т.е., $2! = 1\cdot 2 = 2$, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ и т.д.